

Exercice 1 Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que :

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \quad \text{et} \quad \int_0^1 g(x) dx = -1.$$

En utilisant uniquement les propriétés de linéarité de l'intégrale, calculer les intégrales suivantes sur $[0, 1]$:

1. $\int_0^1 (f(x) + g(x)) dx.$

4. $\int_0^1 (2f(x) - 3g(x)) dx.$

2. $\int_0^1 3f(x) dx.$

5. $\int_0^1 (5f(x) + 4g(x)) dx.$

3. $\int_0^1 -2g(x) dx.$

6. $\int_0^1 (af(x) + bg(x)) dx,$ où a et b sont deux constantes réelles.

Exercice 2 Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur $[0, 3]$. On connaît les valeurs suivantes :

$$\int_0^1 f(x) dx = 2, \quad \int_1^2 f(x) dx = -1, \quad \int_2^3 f(x) dx = 3, \quad \int_2^{2.5} f(x) dx = 1$$

En utilisant la relation de Chasles, calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^2 f(x) dx.$

3. $\int_0^3 f(x) dx.$

5. $\int_{2.5}^3 f(x) dx,$

2. $\int_1^3 f(x) dx.$

4. $\int_0^{2.5} f(x) dx,$

Exercice 3 Croissance de l'intégrale

Les questions sont indépendantes.

1. Pour tout $x \in [0; 2]$, on a $-2 \leq f(x) \leq 0$.

Donner un encadrement de $\int_0^2 f(x) dx$.

2. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $I_n = \int_0^1 e^{-x} x^n dx$.

a. Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$,

b. En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.