Histoire 1

La parution de *l'Ars Conjectandi* de Jacques Bernoulli (1713), reprenant notamment d'anciens travaux de Huygens, marque une rupture dans l'histoire des probabilités. On y trouve la première étude de la distribution binomiale, introduite dans le cadre d'un tirage sans remise pour un modèle d'urne.
Un résultat majeur de cet ouvrage est son « *théorème d'or* », la **loi des grands nombres**, qui relie fréquences et probabilité, valide le principe de l'échantillonnage et est le premier exemple de « théorème limite » en théorie des probabilités. Le mathématicien français Bienaymé (en 1853, publication en 1867) et le mathématicien russe Tchebychev (en 1867) démontrent l'inégalité qui porte leur nom, en parlant de fréquences d'échantillons plutôt que de variables aléatoires. Ils fournissent ainsi la possibilité d'une démonstration plus simple de la **loi des grands nombres**.

1 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Dans tout ce chapitre, on considère des variables aléatoires réelles définies sur un univers Ω fini muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$.

1.1 Inégalité de Markov

Propriété 1 *Inégalité de Markov*

Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et soit a un réel strictement positif, alors :

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Interprétation : La probabilité que X prenne des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grand.

Démonstration

Soit Ω l'univers fini sur lequel est défini la variable aléatoire X et soit a un réel strictement positif.
On décompose l'ensemble image $X(\Omega)$ en deux sous-ensembles disjoints X_1 et X_2 tels que $X(\omega) = X_1 \cup X_2$.

- $X_1 = \{x \in X(\Omega),\ x \geqslant a\}$
- $X_2 = \{x \in X(\Omega),\ x < a\}$

X étant définie sur un univers fini, son espérance existe et on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X_1} x\mathbb{P}(X = x) + \sum_{x \in X_2} x\mathbb{P}(X = x)$$

De plus pour tout $x \in X_2$, on a $x \geqslant a$, donc :

$$\sum_{x\in X_1} x\mathbb{P}(X=x) \geqslant \sum_{x\in X_1} a\mathbb{P}(X=x) \Leftrightarrow \sum_{x\in X_1} x\mathbb{P}(X=x) \geqslant a \sum_{x\in X_1} \mathbb{P}(X=x)$$
$$\sum_{x\in X_1} x\mathbb{P}(X=x) \geqslant \sum_{x\in X_1} a\mathbb{P}(X=x) \Leftrightarrow \sum_{x\in X_1} x\mathbb{P}(X=x) \geqslant a\mathbb{P}(X_1)$$

or $X_1 = \{x \in X(\Omega), \geqslant a\}$ donc

$$\sum_{x\in X_1} x\mathbb{P}(X=x) \geqslant \sum_{x\in X_1} a\mathbb{P}(X=x) \Leftrightarrow \sum_{x\in X_1} x\mathbb{P}(X=x) \geqslant a\mathbb{P}(X \geqslant a)$$

Par ailleurs, $\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X_1} x\mathbb{P}(X=x) + \sum_{x\in X_2} x\mathbb{P}(X=x)$ avec X à valeurs positives, donc $\sum_{x\in X_2} x\mathbb{P}(X=x) \geqslant 0$ et donc :

$$\mathbb{E}(X) \geqslant \sum_{x\in X_1} x\mathbb{P}(X=x)$$

or $\sum_{x\in X_1} x\mathbb{P}(X=x) \geqslant a\mathbb{P}(X \geqslant a)$ donc

$$\mathbb{E}(X) \geqslant a\mathbb{P}(X \geqslant a)$$

On en déduit l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

1.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété 2 ***Inégalité de Bienaymé-Tchebychev***

Si X est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V alors :

$$\text{pour tout réel } \delta > 0, \quad \mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{\delta^2}$$

Interprétation : L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev met en évidence l'écart-type comme mesure de dispersion des valeurs d'une variable aléatoire autour de son espérance. La probabilité que les valeurs d'une variable aléatoire s'écartent de son espérance sont d'autant plus petites que sa variance et donc son écart-type, sont petits.

Démonstration

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et soit δ un réel strictement positif.
On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire réelle $(X-\mu)^2$ à valeurs positives avec $a = \delta^2 > 0$:

$$\mathbb{P}\left((X-\mu)^2 \geqslant \delta^2\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right)}{\delta^2}$$

Par définition de la variance, on a $\mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right) = \mathbb{V}(X)$ et de plus on a $(X-\mu)^2 \geqslant \delta^2 \Leftrightarrow |X-\mu| \geqslant \delta$, donc on a :

$$\mathbb{P}\left(\left|X-\mu\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\delta^2}$$

Ce qui démontre l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Capacité 1 ***Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (Capacité 5 p. 407)***

Métropole juin 2024 jour 1.

Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2. La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client. On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :

- L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;
- L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.

- $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$ et T_1 et T_2 sont deux variables indépendantes, donc
- $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$.

2. On note A l'événement « *Le client reçoit sa commande entre 5 et 9 jours après sa commande, bornes comprises* ». Exprimer A en fonction de T et de $E(T)$.

$A = [5 \leqslant T \leqslant 9] = \left[\left|T - \mathbb{E}(T)\right| \leqslant 2\right]$

Comme T ne prend que des valeurs entières, on a aussi : $A = \left[\left|T - \mathbb{E}(T)\right| < 3\right]$.

3. Sélectionner la ou les expressions correctes de l'événement contraire $\overline{A}$:

- $\overline{A} = \left|T - E(T)\right| > 2 \Longrightarrow$ **Bonne réponse**
- $\overline{A} = \left|T - E(T)\right| \geqslant 2$
- $\overline{A} = \left|T - E(T)\right| \geqslant 3 \Longrightarrow$ **Bonne réponse**

Attention le contraire d'une inégalité large est une inégalité stricte.

4. Majorer $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$ avec l'inégalité de *Bienayme-Tchebychev*. L'inégalité de *Bienayme-Tchebychev* permet de majorer un événement représentant un écart par rapport à l'espérance qui est défini avec une inégalité large $\geqslant$. On choisit donc l'expression $\overline{A} = \left|T - E(T)\right| \geqslant 3$ et l'inégalité de *Bienayme-Tchebychev* donne :

$$\mathbb{P}\left(\left|T - E(T)\right| \geqslant 3\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(T)}{3^2} \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left(\left|T - E(T)\right| \geqslant 3\right) \leqslant \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3}$$

On a établi que $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \leqslant \dfrac{1}{3}$.

5. En déduire une minoration de $\mathbb{P}(A)$.

De $\mathbb{P}(\overline{A}) \leqslant \frac{1}{3}$ on déduit que $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) \geqslant 1 - \frac{1}{3}$ c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{2}{3} \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\left| T - E(T) \right| \geqslant 3) \geqslant \frac{2}{3}$$

Capacité 2 ***Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et probabilité des écarts à l'espérance***

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.

1. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on a :

$$\mathbb{P}(\left| X - \mu \right| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(\left| X - \mu \right| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{\sigma^2}{(k\sigma)^2} \Leftrightarrow \mathbb{P}(\left| X - \mu \right| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

b. Commenter cette phrase du programme officiel :

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montre que des écarts de X à μ de quelques σ deviennent improbables.

Une probabilité étant toujours positive, on déduit de l'inégalité précédente que :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(\left| X - \mu \right| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

Dans l'encadrement précédent, lorsque k tend vers l'infini, $\mathbb{P}(\left| X - \mu \right| \geqslant k\sigma)$ tend vers 0 d'après le théorème de limite par encadrement.

2. **a.** Déterminer une valeur de k pour laquelle $\mathbb{P}(\left| X - \mu \right| \geqslant k\sigma) \leqslant 0,1$.

$\frac{1}{k^2} = 0,1 \Leftrightarrow k = \sqrt{10} \approx 3,16$.

Par inclusion d'événements, pour $k \geqslant \sqrt{10}$ on a $\left[\left| X - \mu \right| \geqslant k\right] \subset \left[\left| X - \mu \right| \geqslant \sqrt{10}\right]$ et d'après l'inégalité précédente :

$$\mathbb{P}(\left| X - \mu \right| \geqslant k\sigma) \leqslant \mathbb{P}(\left| X - \mu \right| \geqslant \sqrt{10}\sigma) \leqslant \frac{1}{10}$$

b. Interpréter la valeur de k obtenue.

Pour $k \geqslant \sqrt{10}$, donc à partir de l'entier 4, la probabilité d'un écart absolu de plus de $k\sigma$ entre X et μ est majorée par 0, 1.

3. Démontrer que pour tout réel $\delta \geqslant 1$, on a :

$$\mathbb{P}(\mu - \delta\sigma < X < \mu + \delta\sigma) \geqslant \frac{\delta^2 - 1}{\delta^2}$$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|X-\mu\right|\geqslant\delta\sigma\right)\leqslant\frac{\sigma^2}{(\delta\sigma)^2}\Leftrightarrow\mathbb{P}\left(\left|X-\mu\right|\geqslant\delta\sigma\right)\leqslant\frac{1}{\delta^2}$$

Par passage à l'événement contraire, on en déduit que :

$$\mathbb{P}\left(\mu-\delta\sigma<X<\mu+\delta\sigma\right)=1-\mathbb{P}\left(\left|X-\mu\right|\geqslant\delta\sigma\right)\Leftrightarrow\mathbb{P}\left(\mu-\delta\sigma<X<\mu+\delta\sigma\right)\geqslant 1-\frac{1}{\delta^2}$$
$$\mathbb{P}\left(\mu-\delta\sigma<X<\mu+\delta\sigma\right)=1-\mathbb{P}\left(\left|X-\mu\right|\geqslant\delta\sigma\right)\Leftrightarrow\mathbb{P}\left(\mu-\delta\sigma<X<\mu+\delta\sigma\right)\geqslant\frac{\delta^2-1}{\delta^2}$$

2 Inégalité de concentration et loi faible des grands nombres

2.1 Retour sur les sommes de variables aléatoires

Capacité 3

On rappelle qu'une variable aléatoire X définie sur un univers fini Ω muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p si elle prend comme valeurs 1 et 0 avec les probabilités $\mathbb{P}(X=0)=p$ et $\mathbb{P}(X=1)=1-p$.
Soit n un entier strictement positif, $X_1, X_2, \dots, X_n$ désignent n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.
On définit les variables aléatoires :

$$S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n=\sum_{k=1}^{n}X_k \quad \text{et} \quad M_n=\frac{S_n}{n}$$

1. Déterminer l'espérance et la variance de X_1.

   Si X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre p alors : $\mathbb{E}(X_1)=p$ et $\mathbb{V}(X_1)=p(1-p)$.

2. **a.** Que représente la variable S_n ? Quelle est sa loi de probabilité ?

   D'après une propriété du chapitre précédent, la somme des variables aléatoires constituant un échantillon d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, suit une loi binomiale de paramètres n et p.

   b. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n.

   D'après une propriété du chapitre précédent, on a $\mathbb{E}(S_n)=np$ et $\mathbb{V}(S_n)=np(1-p)$.

3. **a.** Que représente la variable M_n ? Quelle est sa loi de probabilité ?

   $\mathbb{E}(M_n)=\dfrac{S_n}{n}$ est la variable aléatoire donnant la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

   D'après une propriété du chapitre précédent, on a $\mathbb{E}(M_n)=\mathbb{E}(X_1)=p$ et $\mathbb{V}(M_n)=\dfrac{\mathbb{V}(X_1)}{n}=\dfrac{p(1-p)}{n}$.
   La loi de probabilité de M_n se déduite de la loi de probabilité de S_n qui est une loi binomiale de paramètres n et p.

   Pour tout réel u tel que $k=nu\in[\![0\,;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(M_n=u)=\mathbb{P}(S_n=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

b. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire M_n.

D'après une propriété du chapitre précédent, on a $\mathbb{E}(M_n) = p$ et $\mathbb{V}(M_n) = \dfrac{p(1-p)}{n}$.

2.2 Inégalité de concentration

Propriété 3 ***Inégalité de concentration***

Soit n un entier strictement positif et soit , $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes, suivant une même loi de probabilité d'espérance μ et de variance V.

On note $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne sur l'échantillon de taille n constitué par le n-uplet $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

M_n vérifie **l'inégalité de concentration** :

$$\text{pour tout réel } \delta > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|M_n - \mu\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

Démonstration

Soit n un entier strictement positif, la variable aléatoire M_n donnant la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V. On a $\mathbb{E}(M_n) = \mu$ et $\mathbb{V}(M_n) = \dfrac{V}{n}$.

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à M_n :

$$\mathbb{P}\left(\left|M_n - \mu\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{\frac{V}{n}}{\delta^2} \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left(\left|M_n - \mu\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

Corollaire ***Inégalité de concentration pour une variable de Bernoulli***

Soit n un entier strictement positif et un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance $p(1-p)$.

La variable aléatoire moyenne M_n sur cet échantillon de taille n vérifie l'inégalité de concentration :

$$\text{pour tout réel } \delta > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|M_n - p\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

Démonstration

Soit n un entier strictement positif, la variable aléatoire M_n donnant la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On a $\mathbb{E}(M_n) = p$ et $\mathbb{V}(M_n) = \dfrac{p(1-p)}{n}$.

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à M_n :

$$\mathbb{P}\left(\left|M_n - p\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{\frac{p(1-p)}{n}}{\delta^2} \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left(\left|M_n - p\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

Capacité 4 ***Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi***

On lance une pièce équilibrée n fois de suite avec n un entier strictement positif.
La variable aléatoire M_n donne la proportion de Pile obtenus au cours des n lancers.

1. Déterminer l'espérance et la variance de M_n.

   On a $M_n = \dfrac{S_n}{n}$ où S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,5$.

   On a donc $\mathbb{E}(M_n) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n)}{n} = \dfrac{np}{n} = p = 0,5$ par linéarité de l'espérance.

   On a $\mathbb{V}(M_n) = \dfrac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2} = \dfrac{np(1-p)}{n^2} = \dfrac{p(1-p)}{n} = \dfrac{1}{4n}$

2. Justifier que $\mathbb{P}(|M_n - 0,5| \geqslant 0,1) \leqslant \dfrac{25}{n}$.

   On applique l'inégalité de Bienaymé-Techebychev à la variable aléatoire M_n :

$$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{\mathbb{V}(M_n)}{0,1^2} \iff \mathbb{P}(|M_n - 0,5| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\frac{1}{4n}\right)}{0,1^2} = \frac{25}{n}$$

3. Déterminer une valeur de n telle que $\mathbb{P}(|M_n - 0,5| \geqslant 0,1) \leqslant 0,05$.

   On dit que l'on obtient pour M_n une précision de $0,1$ avec un risque de $0,05$.

   On résout l'inéquation $\dfrac{25}{n} \leqslant 0,05 \iff 500 \leqslant n$.

2.3 Loi faible des grands nombres de Bernoulli

Propriété 4

Soit n un entier strictement positif et soit , $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes, suivant une même loi de probabilité d'espérance μ et de variance V.

On note $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne sur l'échantillon de taille n constitué par le n-uplet $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Pour tout réel $\delta > 0$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| \geqslant \delta) = 0$$

Interprétation : L'écart entre la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable ne dépasse une valeur donnée à l'avance qu'avec une probabilité qui tend vers zéro quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

Démonstration *Au programme*

Pour tout n un entier strictement positif, la variable aléatoire M_n donnant la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
L'espérance de M_n est $\mathbb{E}(M_n) = \mu = p$.
D'après la propriété précédente, tout réel $\delta > 0$, et tout entier $n > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

De plus une probabilité est toujours positive donc tout réel $\delta > 0$ et pour tout entier $n > 0$, on a :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p(1-p)}{n\delta^2} = 0$ par quotient.
Donc, d'après le théorème de limite par encadrement, on a, pour tout réel $\delta > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| \geqslant \delta) = 0$$

Algorithmique 1 *Déterminer une fréquence d'échantillon*

S_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ avec n entier naturel, $n \geqslant 1$ et $p \in]0\,;1[$.

1. Démontrer que $\mathbb{P}(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n}) \leqslant p(1-p)$ avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

   On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n}) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\sqrt{n}^2} \iff \mathbb{P}(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n}) \leqslant \frac{\mathbb{V}(np(1-p))}{\sqrt{n}^2}$$
$$\mathbb{P}(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n}) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\sqrt{n}^2} \iff \mathbb{P}(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n}) \leqslant p(1-p)$$

2. Compléter la fonction Python `S(n,p)` ci-dessous pour qu'elle renvoie une réalisation de la variable aléatoire S_n.

```python
from random import random

def S(n, p):
    """Renvoie une simulation d'une va de loi B(n,p)"""
    s = 0
    for k in range(n):
        if random() <= p:
            s = s + 1
    return s
```

3. Compléter la fonction Python `echantillon_S(n,p,m)` ci-dessous pour qu'elle renvoie un échantillon de taille m de réalisations de la variable aléatoire S_n.

```python
def echantillon_S(n,p,m):
```

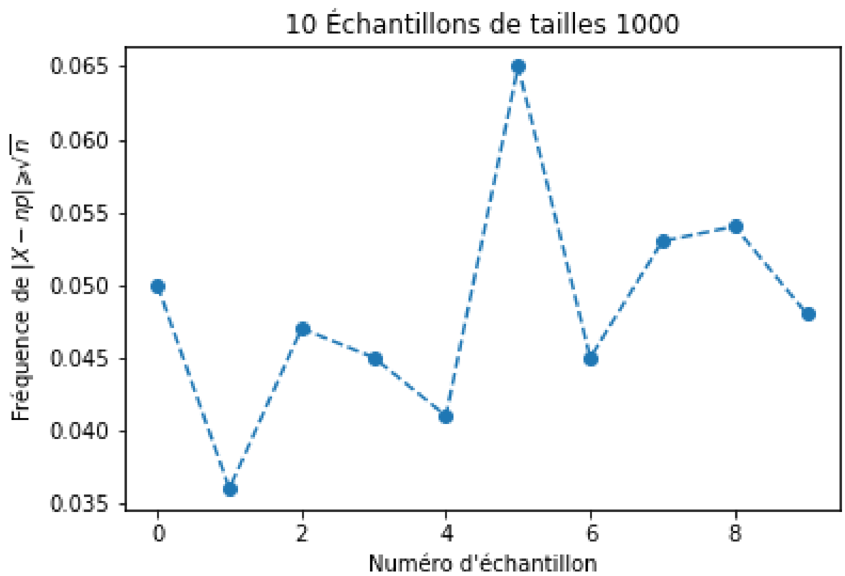
```python
    """Renvoie un échantillon de taille m
    d'une va S de loi B(n,p)"""
    return [S(n, p) for k in range(m)]
```

4. Compléter la fonction Python `frequence_fluctuation_echantillon(n, p, m)` ci-dessous pour qu'elle renvoie la fréquence de réalisations de la variable aléatoire S_n à une distance de l'espérance $\mathbb{E}(S_n) = np$ supérieure ou égale à $\sqrt{n}$. sur un échantillon de taille m de réalisations de la variable aléatoire S_n.

```python
def frequence_fluctuation_echantillon(n, p, m):
    """Renvoie la fréquence de réalisations telles que
    |S(n,p) - n * p| >= sqrt(n)
    sur un échantillon de taille m d'une va S de loi B(n,p)"""
    b = 0
    echant = echantillon_S(n,p,m)
    for val in echant:
        if (val - n * p) ** 2 >= n:
            b = b + 1
    return b / m
```

5. Le graphique ci-dessous représente un échantillon de dix valeurs de `frequence_fluctuation_echantil` `0.4, 1000)`.

Comparer les fréquences obtenues avec la majoration de $\mathbb{P}\left(\left|S_n - np\right| \geqslant \sqrt{n}\right)$ obtenue en question **1.**



L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne (avec $p = 0,4$) :

$\mathbb{P}\left(\left|S_n - np\right| \geqslant \sqrt{n}\right) \leqslant 0,4(1-0,4) = 0,24$

Expérimentalement, on peut observer que $\mathbb{P}\left(\left|S_n - np\right| \geqslant \sqrt{n}\right)$ est sans doute bien plus faible car les fréquences empiriques de l'événement $\left[\left|S_n - np\right| \geqslant \sqrt{n}\right]$ sont majorées par 0,065 (huit échantillons seulement mais de grande taille).

Table des matières