1 Succession d'expériences aléatoires indépendantes

1.1 Indépendance de deux événements pour une loi de probabilité $\mathbb{P}$

Définition 1

On considère une loi de probabilité $\mathbb{P}$ définie sur l'univers fini Ω d'une expérience aléatoire.
Deux événements A et B inclus dans Ω sont **indépendants** pour la loi $\mathbb{P}$ si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

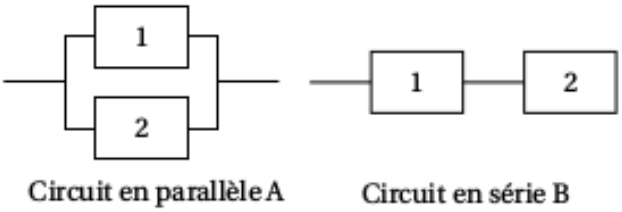
Propriété 1

On considère une loi de probabilité $\mathbb{P}$ définie sur l'univers fini Ω d'une expérience aléatoire.
Soient deux événements A et B de probabilités non nulles :

- A et B sont indépendants pour la loi $\mathbb{P}$ si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.
- A et B sont indépendants pour la loi $\mathbb{P}$ si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Capacité 1 ***Utiliser l'indépendance de deux événements***

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-contre :



Circuit en parallèle A Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

1.2 Succession de plusieurs expériences aléatoires indépendantes

Définition 2

On considère n expériences aléatoires **successives**. Si les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des autres expériences, on dit que ces expériences sont **indépendantes**.

Capacité 2 *Identifier des expériences successives indépendantes*

Déterminer dans chaque cas si les épreuves successives sont indépendantes ou non.

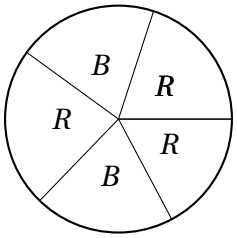
Description	**Succession d'expériences indépendantes (Oui/Non)**
Tirages successifs de boules dans une urne sans remise de la boule tirée	...
Tirages successifs de boules dans une urne avec remise de la boule tirée	...
Pile ou face successifs avec une pièce	...

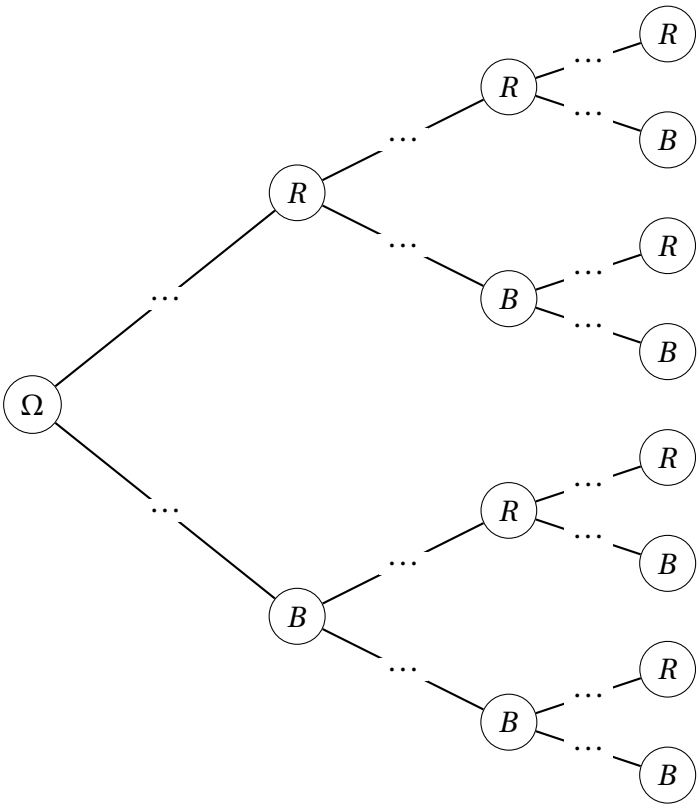
Propriété 2

Dans le cas d'une d'une succession d'expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats lors des expériences successives s'obtient en multipliant les probabilités d'obtenir chaque résultat de la liste.

Capacité 3 *Répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes*

Lors de sa prochaine tournée *Starman*, le chanteur *David B.* va effectuer avant chaque concert un tirage aléatoire. Il lancera une fléchette sur la cible ci-dessous dont tous les secteurs sont superposables. Le secteur atteint donnera la couleur de ses cheveux pour le concert.





Lors de chaque tirage, on note :

- ☞ R l'issue « Les cheveux seront rouges »
- ☞ B l'issue « Les cheveux seront bleus »

On peut considérer que les tirages effectués pour les concerts successifs sont mutuellement indépendants.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-après modélisant les couleurs de cheveux du chanteur lors de trois concerts successifs.
2. Calculer la probabilité que *David B.* ait les cheveux rouges pour ses trois concerts.
3. Calculer la probabilité que *David B.* ait les cheveux de la même couleur pour ses trois concerts.
4. Calculer la probabilité que *David B.* ait les cheveux de la couleur rouge pour au moins un concert.

2 Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux

2.1 Épreuve et loi de Bernoulli

Définition 3

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire E dont l'univers Ω ne comporte que deux issues appelées « succès » (noté S) et échec (noté $\overline{S}$) de probabilités respectives p et $1-p$.
La variable aléatoire $X : \Omega \to \{0,1\}$ qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p,qu'on note $\mathscr{B}(p)$.
La loi de probabilité d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p, est donnée par le tableau :

k	1	0
$\mathbb{P}(X=k)$	p	$1-p$

Capacité 4 ***Identifier une épreuve de Bernoulli et déterminer son paramètre, voir exo résolu 2 p. 197***

Un joueur participe au jeu suivant à l'entrée d'une séance de cinéma :

- On lance deux dés cubiques équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6, et on note les numéros apparaissant sur la face supérieure de chaque dé.
- Le joueur reçoit 1 sucette si le produit des numéros apparaissant sur les faces supérieures des deux dés lancés est strictement inférieur à 10, sinon il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de sucettes reçues par le joueur.

1. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ? X suit-elle une loi de Bernoulli ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. D'après vous, sur un échantillon de 3600 entrées, combien de sucettes seront-elles distribuées en moyenne gratuitement par le cinéma ?

Propriété 3 ***Espérance et variance d'une variable aléatoire de Bernoulli***

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 \leqslant p \leqslant 1$.
On utilise trois indicateurs pour caractériser une variable aléatoire.

Indicateur d'une variable aléatoire	**Équivalent en statistiques**	**Interprétation**	**Valeur pour une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p**
Espérance	Moyenne	Nombre de succès moyen sur un grand nombre de réalisations	$\boxed{\mathbb{E}(X) = p}$
Variance	Variance	Dispersion des valeurs autour de l'espérance	$\boxed{\mathbb{V}(X) = p(1-p)}$
Écart-type	Écart-type	Dispersion des valeurs autour de l'espérance, même unité que l'espérance	$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}}$

2.2 Schéma de Bernoulli

Définition 4

On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p la répétition de n épreuves de Bernoulli (avec $n \geqslant 1$) de paramètre p (avec $0 \leqslant p \leqslant 1$) identiques dans des conditions d'indépendance (c'est à dire que l'issue d'une épreuve ne dépend pas des issues des autres épreuves).

Capacité 5 ***Identifier une schéma de Bernoulli***

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, déterminer si elle peut être modélisée par un schéma de Bernoulli et si oui, préciser ses paramètres.

1. Expérience aléatoire : On lance dix fois une pièce équilibrée et on compte le nombre de « Face » obtenues

   C'est / ce n'est pas un schéma de Bernoulli :

   - épreuve de Bernoulli : lancer d'une pièce équilibrée avec une probabilité de succès $\boxed{p = \dots}$.
   - nombre de répétitions : : $\boxed{n = \dots}$.
   - épreuves indépendantes : *oui / non*

2. Expérience aléatoire : On tire trois fois et avec remise une boule dans une urne contenant 10 noires et 7 boules rouges et on note le nombre de boules rouges obtenues.

   C'est / ce n'est pas un schéma de Bernoulli :

   - épreuve de Bernoulli : tirage d'une boule rouge dans une urne avec une probabilité de succès $\boxed{p = \dots}$.
   - nombre de répétitions : : $\boxed{n = \dots}$.

- épreuves indépendantes : *oui* / *non*

3. Expérience aléatoire : On tire trois fois et sans remise une boule dans une urne contenant 10 noires et 7 boules rouges et on note le nombre de boules rouges obtenues.

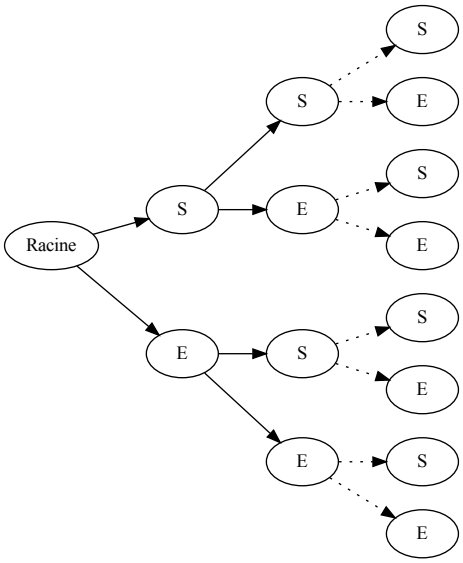
C'est / *ce n'est pas* un schéma de Bernoulli :

- épreuve de Bernoulli : tirage d'une boule rouge dans une urne avec une probabilité de succès $\boxed{p = \dots}$.
- nombre de répétitions : : $\boxed{n = \dots}$.
- épreuves indépendantes :*oui* / *non*

2.3 Coefficients binomiaux

Définition 5

Un **schéma de Bernoulli** avec n (avec n entier naturel non nul) épreuves de *Bernoulli* identiques et indépendantes peut être représenté par un arbre :



Le **nombre de chemins** dans l'arbre (de la racine jusqu'à une feuille) comportant exactement k **succès** et $n-k$ **échecs** est égal au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, on l'appelle **coefficient binomial** k **parmi** n et on le note $\boxed{\binom{n}{k}}$.

Propriété 4

Soit un entier naturel n et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

- $\binom{0}{0} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ***Propriété de symétrie***

3 Loi binomiale

3.1 Loi du nombre de succès

Définition 6

Soit un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p et soit X la variable aléatoire qui à une liste de n résultats $\left(\text{comme } \left(S, \overline{S}, \overline{S}, \cdots, S\right)\right)$ associe le nombre de succès dans cette liste.
On dit que X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

3.2 Loi de probabilité d'une loi binomiale

Propriété 5

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ avec n entier non nul et p réel entre 0 et 1.
Pour tout entier $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ on peut exprimer $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$ en fonction de du nombre de chemins réalisant k succès soit $\binom{n}{k}$ et de la probabilité d'un tel chemin soit $p^k(1-p)^{n-k}$:

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Méthode ***Fonctions préprogrammées de la calculatrice ou du tableur, voir manuel Indice p.372 et p.373***

	Menu	$\mathrm{P}(X = k)$	$\mathrm{P}(X \leqslant k)$
Casio	Touche **MENU** puis **STAT** puis **DIST**, puis **BINM**	Choisir **Bpd** et **Var** puis saisir les paramètres	Choisir **Bcd** et **Var** puis saisir les paramètres
Texas	Menu **Distrib** (2nde var) puis **binomFdp**, ou **binomFRep**	**binomFdp(n,p,k)**	**binomFrép(n,p,k)**
Numworks	Menu **Calculs** puis **Probabilités** dans la **Boîte à outils**	**binompdf(k, n, p)**	**binomcdf(k, n, p)**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,0{,}3)$, si on utilise le tableur `Calc` de `LibreOffice` :

- pour calculer $\mathbb{P}(X=2)$ dans une cellule, on saisit `=LOI.BINOMIALE(2;10;0,3;0)`
- pour calculer $\mathbb{P}(X\leqslant 2)$ dans une cellule, on saisit `=LOI.BINOMIALE(2;10;0,3;1)`
- pour calculer $\mathbb{P}(X\geqslant 2)$, on passe à l'événement contraire et $\mathbb{P}(X\geqslant 2)=\mathbb{P}(X>1)=1-\mathbb{P}(X\leqslant 1)$.

Capacité 6 ***Calculer des probabilités pour une loi binomiale***

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,3$.
Calculer des valeurs approchées des probabilités ci-dessous, avec les fonctions préprogrammées de la calculatrice.

1. $\mathbb{P}(X=3)$

2. $\mathbb{P}(X\leqslant 3)$

3. $\mathbb{P}(X\leqslant 4)$

4. $\mathbb{P}(X\geqslant 4)$

5. $\mathbb{P}(4\leqslant X\leqslant 8)$

6. $\mathbb{P}((X\leqslant 4)\cup(8\leqslant X))$

3.3 Modéliser une situation par une loi binomiale

Capacité 7 ***Modéliser une situation par une loi binomiale***

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que la probabilité qu'un casque de cette marque choisi au hasard présente un défaut est de $0,036$.
On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n=35$.

a. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,\ p)$ où $n=35$ et $p=0,036$.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception. Donner une valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près.

c. Calculer la probabilité qu'exactement trois casques présentent un défaut. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près en indiquant la méthode de calcul.

d. Calculer la probabilité qu'au moins un des 35 casques présente un défaut. Donner une valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près.

2. Dans cette question, n n'est pas fixé.

Déterminer le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieure à $0,99$.

3.4 Espérance, variance et écart-type d'une loi binomiale

Propriété 6

Soit n un entier naturel non nul et p un réel entre 0 et 1.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ de paramètres n et p.

1. L'espérance de X est $\boxed{\mathbb{E}(X) = np}$.
2. La variance de X est $\boxed{\mathbb{V}(X) = np(1-p)}$.
3. L'écart-type de X est $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$.

Capacité 8 ***Utiliser l'espérance d'une loi binomiale***

Sur une ligne aérienne, une compagnie affrète un appareil de 200 places et vend 202 réservations par vol. On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 202$ et $p = 0,971$.

1. Déterminer le nombre moyen de passagers par vol.
2. Calculer la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement.
3. Calculer la probabilité qu'un seul client parmi les 202 qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement.
4. En déduire la probabilité que la compagnie se trouve en situation de surréservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).

4 Loi géométrique

4.1 Loi discrète du temps d'attente

Définition 7

On répète de façon indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p > 0$.
La variable aléatoire X qui renvoie le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès, suit une **loi géométrique de paramètre** p.

Propriété 7 ***Loi de probabilité d'une loi géométrique***

Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi géométrique de paramètre** p **tel que** $0 < p \leqslant 1$, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Propriété 8 ***Espérance d'une loi géométrique, admise***

Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi géométrique de paramètre** p **tel que** $0 < p \leqslant 1$, l'espérance de X est égale à :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}}$$

Capacité 9 ***Utiliser une loi géométrique, voir exo 16 p. 203***

1. Quel est le nombre moyen de lancers pour obtenir un premier 6, lors d'une répétition d'expériences indépendantes de lancers d'un dé équilibré à 6 faces ?
2. Dans chaque cas, Y désigne une variable aléatoire, suivant une loi géométrique de paramètre p tel que $0 < p \leqslant 1$.
   a. Déterminer p si $\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2}$.
   b. Déterminer p si $\mathbb{P}\big(Y > 2\big) = 0,49$.

4.2 Une loi sans mémoire

Propriété 9

Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi géométrique de paramètre** p **tel que** $0 < p \leqslant 1$, pour tout entier naturel n, on a :

$$\mathbb{P}\big(X > n\big) = (1-p)^n$$

Propriété 10 ***Loi sans mémoire***

Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi géométrique de paramètre** $p > 0$.
Pour tous entiers naturels $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$, on a :

$$\mathbb{P}_{X>n}\big(X > n+k\big) = \mathbb{P}\big(X > k\big)$$

Démonstration

.....

.....

Capacité 10 ***Utiliser une loi géométrique, voir aussi exercice 92 p.212***

Soit Z la variable aléatoire simulée par la fonction Python ci-dessous.

```
from random import randint
# randint(1, 6) est un entier aléatoire entre 1 et 6

def dé():
    """Simule le lancer d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6
        """
    return randint(1, 6)

def Z():
    """Simule une variable aléatoire Z"""
    rang_lancer = 1
    while dé() < 6:
        rang_lancer = rang_lancer + 1
    return rang_lancer
```

1. Donner la loi suivie par la variable aléatoire Z, préciser sa ou ses caractéristique(s).
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité $\mathbb{P}(Z = 3)$.
3. Calculer la valeur exacte de la probabilité $\mathbb{P}(Z > 7)$.
4. Le joueur n'a pas obtenu de 6 sur ses trois premiers lancers. Calculer la valeur exacte de la probabilité que le premier 6 n'arrive pas avant le septième lancer.