Exercice 1

Dans cet exercice, y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note (E) l'équation différentielle telle que pour tout réel x :

$$y'(x) = -4y(x) + 2e^{-4x}$$

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réel x :

$$f(x) = e^{-4x}(2x-5)$$

1. Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = e^{-4x}(22-8x)$.
2. En déduire que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

Corrigé 1

1. Pour tout réel x, on a :

$$f(x) = u(x) \times v(x) \quad \text{avec} \quad u(x) = e^{-4x} \quad \text{et} \quad v(x) = 2x-5$$

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$u'(x) = -4e^{-4x} \quad \text{et} \quad v'(x) = 2$$

D'après une propriété du cours, on a : $(uv)' = u'v + uv'$, donc pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$
$$f'(x) = -4e^{-4x} \times (2x-5) + 2e^{-4x}$$

on factorise par e^{-4x}

$$f'(x) = e^{-4x}(-4(2x-5)+2) = e^{-4x}(-8x+22)$$

Ainsi on a démontré que pour tout réel x, on a $\boxed{f'(x) = e^{-4x}(-8x+22)}$.

2. Vérifions que f vérifie pour tout réel x : $f'(x) = -4f(x) + 2e^{-4x}$.
Pour tout réel x :
   - ☞ D'un part on a $f'(x) = e^{-4x}(-8x+22)$.
   - ☞ D'autre part on a :

$$-4f(x) + 2e^{-4x} = -4e^{-4x}(2x-5) + 2e^{-4x}$$
$$-4f(x) + 2e^{-4x} = e^{-4x}(-4(2x-5)+2) = e^{-4x}(-8x+22)$$

On en déduit que pour tout réel x on a $f'(x) = -4f(x) + 2e^{-4x}$.
La fonction f est donc solution de l'équation différentielle (E) : $y'(x) = -4y(x) + 2e^{-4x}$.